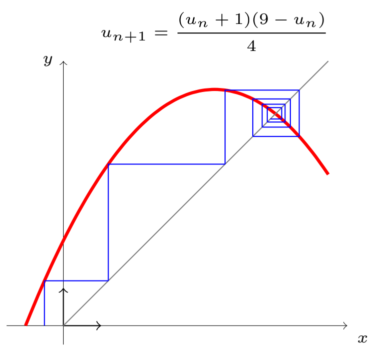
ECOLE NATIONALE DES
SCIENCES APPLIQUEES
KENITRA

Année universitaire
2010-2011

POLYCOPIÉ DES TRAVAUX DIRIGÉS D'ANALYSE

- Semestre I -



Moulay Taib BELGHITI
Mostafa MASLOUHI
Driss GRETETE

Table des matières

1 Nombres réels

Exercice 1 Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en montrant qu'un entier dont le carré est divisible par 3 l'est aussi.

Exercice 2 Donner une autre preuve de la proposition selon laquelle l'équation $2n^2 = m^2$ n'a aucune solution entière en utilisant le théorème d'arithmétique disant que la mise en facteurs premier est unique. On comparera le nombre de facteurs 2 des deux membres de l'équation.

Exercice 3 Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas rationnel en démontrant à l'aide d'une mise en facteurs premier que $2n^3 = m^3$ n'a pas de solution entière.

Exercice 4 Montrer que l'équation $y^2 = 2x^2$ n'a pas d'autre solution rationnelle que $(0, 0)$.

Exercice 5 Montrer qu'il n'existe pas d'entiers k, m, n tels que :

$$\left[\frac{k + \frac{m}{\sqrt{2}}}{n}\right]^3 = 2$$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y & = 1998 \\ xy & = 1998t \ (t \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Exercice 7 Montrer que les sommes partielles de :

$$S = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^3} \cdots + (-1)^n \frac{1}{10^n} + \ldots.$$

forment un emboîtement régulier que l'on explicitera. Déterminer l'intersection de cet emboîtement.

Exercice 8 Montrer que les sommes partielles de la série :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \ldots.$$

forment un emboîtement réqulier dont l'intersection est la valeur de cette série. Quelle est cette valeur ?

Exercice 9 Diviser $12, 27$ par $3, 41$ et montrer que l'on obtient un emboîtement régulier d'intervalles.

Exercice 10 Calculer $\sqrt[3]{4}$ jusqu'à la quatrième décimale à l'aide d'emboîtement.

Exercice 11 Soit $(I_n)_n$ un emboîtement régulier. Soit a_nl'extrémité gauche de I_n.

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $\exists k_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tels que :
$$a_n = a_{n-1} + \frac{k_n}{10^n}$$
2. Si $I_0 = [m, m+1]$ ($m \in \mathbb{N}$), expliciter a_n en fonction de $m, k_1, \ldots, k_n$.
3. On pose :
$$C := m + \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} + \ldots.$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c \leq a_n + \frac{1}{10^n}$. En déduit que : $c \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Exercice 12 Montrer par récurrence les relations suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + \cdots + n & = \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 & = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \end{array}$$

Exercice 13 Montrer par récurrence les inégalités suivantes :
$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$
$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1$$

Exercice 14 Soit :
$$a_n = 0, \underbrace{11\ldots1}_{n\,\text{fois}}\,\underbrace{00\ldots0}_{n\,\text{fois}}\,\underbrace{11\ldots1}_{n\,\text{fois}}\cdots\cdots$$
Ecrire a_1, a_2, a_3 et a_4 dans le système de base 10. Quel est le réel (c'est un rationnel, justifier) auquel se stabilise a_n.

Exercice 15 Montrer que chaque intervalle $[a, b]$ où $a < b$ contient un nombre rationnel et un nombre irrationnel ; montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les nombre rationnels n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16

i. En rappelant la propriété d'Archimède pour l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, montrer que :
$$(\forall a > 0)\,(\forall b \in \mathbb{R}),\ \exists p \in \mathbb{N},\ pa > b$$
ii. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$.
iii. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists! p \in \mathbb{N}$ tel que :
$$p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$$
Indication : on considèrera $\{p \in \mathbb{Z},\ p\varepsilon \leq x\}$.

iv. En utilisant ce qui précède, construire un rationnel z tel que $x < z < y$ où x, y sont des réels donnés à l'avance avec $x < y$.

v. Construire un irrationnel z' tel que $x < z' < y$.

vi. Est-ce que $\mathbb{Q}$ peut contenir un intervalle $]\alpha, \beta[$ $(\alpha < \beta)$? Est-ce que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ peut contenir un intervalle ? Quel est le plus "gros" $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Exercice 17 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! p_n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < (p_n + 1)\frac{1}{10^n}$$

2. Montrer que $10p_n \leq p_{n+1} < 10(1 + p_n)$. Donner une interprétation convenable.

Exercice 18 Soient A et B deux sous ensembles non vide de $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R} = A \cup B$ et que tout nombre de A soit plus petit que tout nombre de B.
Montrer qu'il existe un nombre réel c qui est, ou le plus grand nombre de A, ou le plus petit nombre de B. C'est le théorème de la "coupure" de Dedekind. Indication : on utilisera une version analogue à celle des emboîtements réguliers.

Exercice 19 Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation à 4 inconnues :

$$31(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 40(yzt + y + t)$$

Exercice 20 p et q étant deux entiers relatifs tel que $p^2 - 4q < 0$. Donner le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, ainsi que ces couples, satisfaisants à la relation :

$$x^2 + pxy + qy^2 = 1$$

suivant la valeur de $p^2 - 4q$.

Exercice 21 Déterminer dans $\mathbb{Q}$ l'inégalité suivante :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_j}\Big) \geq n^2 \quad \text{où} \quad \forall i,\ a_i > 0$$

Exercice 22 A tout rationnel x, on associe le nombre $|x|_p = 0$ si $x = 0$ et $|x|_p = \frac{1}{p^n}$ si $x \neq 0$, défini de façon suivante : p étant premier et supérieur à 1, n est l'entier relatif tel que $x = p^n ab^{-1}$, a et b étant entiers premiers avec p, $(b > 0)$. Calculer $|xx'|_p$, $\left|\frac{1}{x}\right|_p$; majorer $|x + x'|_p$. On dit que $x_m \to x$ si $|x_m - x|_p$ tend vers 0. Quel est la limite de $x_m = 1 + a + a^2 + \ldots \cdots + a^n$ lorsque p divise l'entier a.

Exercice 23 Soit f une application de X dans Y. On suppose que $\mathrm{Card}Y = q \in \mathbb{N}^*$ et que pour tout $y \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ est à p éléments. On suppose de plus que f est surjective. Montrer que $\mathrm{Card}X = pq$.

Exercice 24 Soient $\mathrm{Card}X = p$ et Y $= q$. Montrer que l'ensemble des applications de Y dans X a pour cardinal p^q.

Exercice 25 On suppose (cf 24) que $p \leq q$. Montrer que le nombre d'injections de X dans Y est $\frac{q!}{(q-p)!}$. En déduire le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

Exercice 26 Soit Card$X = n$ et soit $p \leq n$. Montrer que le nombre d'ensembles à p éléments contenus dans X est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ On le note C_h^p ou $\binom{n}{p}$: coefficients du binôme.

Exercice 27 En utilisant le fait que dans tout ensemble (fini ou infini) de $\mathbb{N}$, il existe un entier plus petit que tous les autres, démontrer que :

i. Tout entier $n \geq 2$ possède au moins un diviseur premier. (On rappelle qu'un nombre premier est un entier $p \geq 2$ n'admettant pas d'autres diviseurs positifs que 1 et p)
ii. Soient a, $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 1$, il existe des entiers q et r tels que $a = bq + r$ avec $r < b$.

Exercice 28 Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 29 Démontrer que l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n-1$ (resp. $6n-1$) est infini.

Exercice 30 L'ensemble des nombres $an + b$ est infini, $a \wedge b = 1$ (Dirichlet).

Exercice 31 On choisit un entier $q \geq 2$. (Numération de base q)

i. Soit $x \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un et un seul entier $n \geq 0$ tel que $q^n \leq x < q^{n+1}$ puis un et un seul entier a_n vérifiant :
$$0 \leq a_n \leq q-1, \quad a_n q^n \leq x < (a_n+1)q^n$$
ii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe une et une seule suite d'entiers $a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots$ vérifiants :
   1. $0 \leq a_r \leq q-1$, $\forall r \geq 0$.
   2. Les entiers r tels que $a_r \neq 0$ sont en nombre fini.
   3. On a : $x = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_r q^r + \ldots$.

   (Pourqoi le 3 a un sens ?) Montrer que l'entier n de la question i est le plus grand entier tel que $a_n \neq 0$ et que le nombre a_n défini à la question i est égal au nombre a_n de la question ii.
   La suite $a_n.a_{n-1}.\ldots a_0$ est le développement de x dans le système de numération de base q.
iii. Trouver le développement du nombre 718 dans le système de numération binaire (i.e. à base $q = 2$).
iv. Soit x un rationnel positif. Montrer qu'il existe une et une seule suite de nombres entiers :
$$\ldots, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$$
   vérifiant les conditions suivantes :
   1. $0 \leq a_r \leq q-1$, $\forall r \in \mathbb{Z}$.
   2. $\{r \in \mathbb{N};\ a_r \neq 0\}$ est fini.
   3. $\forall r \in \mathbb{Z}$ on a :
$$a_1 q^r + a_{r+1} q^{r+1} + \cdots \leq x < q^r + a_r q^r + a_{r+1} q^{r+1} + \ldots$$
   On dit alors que :
$$a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-r} \ldots$$
   (où n est le plus petit entier naturel tel que $a_r = 0\ \forall r > n$) est le développement de x dans le système de numération de base q.
v. Pour qu'une famille d'entiers a_n ($n \in \mathbb{Z}$) vérifiant 1 et 2 de iv constitue le développement d'un rationnel dans le système de numération de base q, il faut et il suffit qu'il existe un entier rationnel r et un entier $k \geq 1$ tels que l'on ait :
$$a_{n-k} = a_n \quad \forall n \leq r$$
   (périodicité des développements des nombres rationnels).

2 Suites et fonctions numériques

Exercice 1 Calculer la plus grande valeur (justifier) de :

$$\bullet\, u_n = \frac{n^2}{2^n},\ \ n \in \mathbb{N} \qquad \bullet\ u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{10+n},\ \ n \in \mathbb{N} \qquad \bullet\ u_n = \frac{3^n}{n^n},\ \ n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 2 Calculer la plus petite valeur de :

$$\bullet\, u_n = n^2 - 9n - 10 \qquad \bullet\ u_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad \bullet\ u_n = n! \times \frac{1}{2^n}$$

Exercice 3 Calculer $\inf\limits_n u_n$, $\sup\limits_n u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k>n} u_k$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k>n} u_k$ lorsque :

$$\bullet\, u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad \bullet\ u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{2+(-1)^n}{3}$$

Exercice 4 Quelles sont les limites partielles de la suite :

$$1,\ \frac{1}{2},\ -1;\ \frac{1}{3},\ -1;\ 1,\ \frac{1}{4},\ -1;\ 1,\ \dots$$

Exercice 5 Montrer, en utilisant le théorème d'existence de la limite d'une suite monotone, que la suite suivante est convergente :

$$u_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})\dots(1 - \frac{1}{2^n})$$

Exercice 6 Même question pour la suite :

$$u_n = \frac{2}{1}.\frac{3}{3}.\frac{4}{5}.\frac{5}{7}\cdots\frac{n+1}{2n-1}$$

Dans les exercices suivants montrer la convergence par le critère de Cauchy de la suite (u_n) :

Exercice 7 $u_n = \dfrac{1^2}{2} + \dfrac{2^2}{2^2} + \cdots + \dfrac{n^2}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k^2}{2^k}.$

Exercice 8 $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$

Exercice 9 $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}.$

Exercice 10 $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, montrer que sa limite $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11 Soit (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Etudier la suite (u_n) et montrer que sa limite vérifie :

$$l - u_n \leq 2 \times (0,3)^n, \quad n \geq 1$$

Exercice 12

a. Montrer que $\forall n \geq 3$, $\sqrt[n]{n+1} > 1$ et $\sqrt[n]{n+2} < 2$.

b. En déduire que si $a_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}}$ alors :

$$\sqrt{3} < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{5}}} < a_n < 2 \quad \text{pour } n \geq 5.$$

Exercice 13 Soit (x_n) telle que $|x_0| \leq 1$ et $\forall n,\ x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}$. Montrer que (x_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 14 Déterminer la suite (u_n) définie par $u_0 = w$ et $u_{n+1} = au_n + bn + c$.

Exercice 15 Montrer que si $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice 16

a. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

b. Montrer que si (u_n) est de Cauchy et que la suite extraite $(u_{n_k})_k$ est convergente alors la suite (u_n) est convergente.

c. Montrer que toute suite de Cauchy de réels est convergente dans $\mathbb{R}$.

d. Donner des exemples de suites de Cauchy de rationnels qui ne sont pas convergentes dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 17 Démontrer que les suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ sont adjacentes et que leur limite $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 18

a. Montrer que si (a_n) converge, $a_n \in \mathbb{R}$, alors (a_n) est bornée, (a_n) est de Cauchy. Etudier les réciproques.

b. Montrer que si $(a_n) \subset \mathbb{R}$ est bornée alors on peut en extraire une sous suite convergente et retrouver le b et le c de l'exercice 16.

Exercice 19 Montrer que si $\lim u_n = l$ alors $\lim v_n = l$ où :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \ \text{ : moyenne de Cézaro}$$

Etudier la réciproque.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}$. $N(n)$ désigne le nombre de chiffres de n en base 10, $S(n)$ la somme des chiffres de n.

a. Comparer $\log_{10} n$ et $N(n)$ et en déduire que :

$$1 \leq S(n) < 9(1 + \log_{10} n) < 18 \log_{10} n \text{ si } n > 10$$

b. Montrer que la suite $u_n = \frac{S(n+1)}{S(n)}$ est bornée et calculer $\inf u_n$, $\sup u_n$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

c. Soit $v_n := \sqrt[n]{S(n)}$. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 21 Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite d'intervalles emboîtés telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

a. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers la même limite.

b. Retrouver le fait que $\bigcap I_n$ est réduite à un singleton.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit α_n l'entier le plus proche du nombre réel $u_n := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3})^n$. Calculer en fonction de n le reste de la division de α_n par 3.

Exercice 23 Etudier les limites des suites :

$$\bullet\ u_n(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)\dots(\alpha - n)}{n!},\ \alpha > 0$$

$$\bullet\ v_n(\beta) = \frac{\beta(\beta - 1)(\beta - 2)(\beta - 3)\dots(\beta - n)}{n!},\ \beta > 1$$

Exercice 24 On pose $a_k = \sum_0^k C_{k+p}^{2p}$, $k \geq 0$, $b_0 = 0$ et $b_k = \sum_0^{k-1} C_{k+p}^{2p+1}$, $k \geq 1$

i. Calculer $a_{k+1} - a_k$, $b_{k+1} - b_k$ $(k \geq 0)$.

ii. Calculer a_{k+1} en fonction de a_k et b_k ; b_{k+1} en fonction de a_k et b_k puis a_{k+2} en fonction de a_k et a_{k+1}, b_{k+2} en fonction de b_{k+1} et b_k.

iii. Calculer, $(1 - 3x + x^2) \sum_0^n b_k x^k$.

Exercice 25 Soient $A > 1$, $\alpha = 1 + \sqrt{A}$, $\beta = 1 - \sqrt{A}$ et $x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^n - \beta^n}\sqrt{A}$.

i. Calculer x_1 et x_{n+1} en fonction de x_n et x_{2n} en fonction de x_n. On pose $y_1 = 1$ et $y_{n+1} := \frac{1}{2}(y_n + \frac{1}{y_n})$.

ii. Montrer qu'il existe une fonction $m(n)$ telle que $y_n = x_m$.

iii. Quelle sont les limites de x_n et y_n quand n tend vers $+\infty$? Comment sont-elles atteintes ? Supposons que A est rationnel.

iv. Montrer que $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, p_n et q_n sont des entiers que l'on calculera. Calculer $p_n^2 - Aq_n^2$.

Exercice 26 Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\dfrac{1^3}{n^4} + \dfrac{2^3}{n^4} + \dots + \dfrac{(n-1)^3}{n^4}\Big)$.

Exercice 27 Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)}\Big]$.

Exercice 28 Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2}) \dots (1 - \dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 29

i. Montrer que $\log(1+x) \leq x,\ x > 0$.

ii. Montrer que la suite (x_n) avec :

$$x_n = (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\dots(1+\frac{1}{2^n})$$

est convergente.

Exercice 30 Prouver l'inégalité de Bernoulli :

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n$$

où $x_j > -1$, $j = 1, \dots, n$, tous les x_j étant de même signe.

Exercice 31 Soit x_1, x_2, ..., x_n des réels positifs. Montrer que :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),\ n \in \mathbb{N}^*$$

Commencer par les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 2^p$; dans le cas général, on choisira p tel que $2^p \geq n$ et on posera :

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^p} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 32 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer que l'existence de l'une des limites $\lim \sin(n\alpha)$, $\lim \cos(n\alpha)$ entraîne celle de l'autre. Et montrer que cette existence conduit à une contradiction. On utilisera les formules donnant $\sin(n+1)\alpha$, $\cos(n+1)\alpha$, $\sin(2n\alpha)$, $\cos(2n\alpha)$

Exercice 33 Soit la suite $(u_n)_n$ définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

1. En remarquant que $2^{n-1} \leq n!$ pour $n \geq 1$, montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. **Rapidité de convergence.** Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{k-1}}$$

En déduit que $0 < u_{n+1} - u_n < \dfrac{1}{n.n!}$; et que :

$$(*) \qquad\qquad 0 < l - u_n < \frac{1}{n.n!}$$

où $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. **Application.** Montrer que l est irrationnel (observer que si $l = \dfrac{a}{b}$ alors $\dfrac{an!}{b} - n!u_n$ est un entier naturel non nul dès que $n \geq b$ et utiliser $(*)$).

Exercice 34 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

1. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $u_n \leq 2$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2. **Rapidité ou vitesse de convergence.** Pour tout $n \geq 2$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} \leq l - u_n \leq \frac{1}{u_n}$$

où $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 35 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$.

1. Pout tout $n \geq 1$, montrer que $\dfrac{1}{2} \leq u_{2n} - u_n \leq 1$. En conclure que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{k}{2} + 1 \leq u_{2^k} \leq k+1$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\log(n+1) \leq u_n \leq \log(n+1) + 1$ et en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \log n$.
3. **Comportement asymptotique.** On pose $v_n = u_n - \log n$ et $w_n = u_n - \log(n+1)$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjascentes. En déduire que la suite $(u_n - \log n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 36 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable en 0 et $f(0) = 0$. On pose $u_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n+k})$. Montrer que la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite en fonction de $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (cf. exercice ?).
En considèrant $t \longmapsto \log(1+t)$, déterminer la valeur de l. Retrouver le résultat en comparant u_n à une intégrale.

Exercice 37 On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos k$, $n \geq 1$. En utilisant la densité de $\{\cos n,\ n \geq 1\}$ dans $[-1,1]$, montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et de limite nulle.

Exercice 38 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))$ converge si et seulement si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$; déterminer alors sa limite.

Exercice 39 Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(t) = \sqrt{t+n}$, $t \in [0, +\infty[$. On note $\phi_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$.

1. Montrer que, $\forall n \geq 1$, la fonction ϕ_n est lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{2^n\sqrt{n!}}$.
2. Montrer que les suites $(\phi_n(0))_{n\geq 3}$ et $(\phi_n(n))_{n\geq 3}$ sont adjacentes.

Exercice 40 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Calculer u_{10^3} à 10^{-1} près. On pourra introduire la suite $(v_n) = (u_n^2)$.

Exercice 41 Construire les graphes des fonctions suivantes :

$$\bullet\ f(x) = \sup_{0\leq t\leq x} (\sin t) \qquad \bullet\ g(x) = \inf_{0\leq t\leq x} (\sin t)$$

Exercice 42 Déterminer les bornes supérieures et inférieure de $f(x) = x^2$ sur $[-2, 5]$; $g(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0, 3]$.

Exercice 43 Construire les graphes des fonctions suivantes : $y = x + \dfrac{1}{x}$ (hyperbole) ; $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (courbe d'Agnesi) ; $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (trident de Newton), $y = \text{Arcsin}\dfrac{1}{x}$, $y = \text{Arctan}\dfrac{1}{x}$

Exercice 44 Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+3x-1}{2x^2-x+4}\right]^x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a > 0)$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$

(e) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})^{2x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a > 0)$

Exercice 45 Montrer que les fonctions $x \longmapsto \cos\frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$ n'ont pas de limite en 0.

Exercice 46 Discuter l'existence et la valeur éventuelle de :

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha \cos\frac{1}{x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 47 Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 48 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ périodique de période T. Que peut-on dire de f si elle admet une limite quand $t \longrightarrow +\infty$.

Exercice 49 Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} t\sin^2(\frac{1}{t}) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. f admet-elle une limite en 0 ? g est-elle continue en 0 ?
2. Etudier $f \circ g$.

Exercice 50 Soit $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$ $(n \geq 1)$.

a. Prouver qu'il existe un unique $u = u_n > 0$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante.

c. Quelle est sa limite ?

Exercice 51 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$(C) \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

a. Quelles sont les fonctions constantes vérifiants (C) ?
On supposera que f est différente de ces fonctions.

b. Déterminer $f(0)$; comparer $f(x)$ et $f(-x)$.

c. On suppose que c est une racine de f. Montrer que $4c$ est une période de f.

d. Soit t une période de f. Montrer que si $\frac{t}{2}$ n'est pas une période de f alors $f(\frac{t}{2}) = -1$ et que $f(\frac{t}{4}) = 0$.

e. On suppose que f admet au moins une racine. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$ et $\forall x \in [0, a[$, $f(x) > 0$. Montrer que f est décroissante sur $[0, a]$. Etudier cette fonction sur l'intervalle d'une période.

Exercice 52 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f^{-1} existe. Prouver que f est nécessairement monotone.

Exercice 53 Prouver le critère de Cauchy suivant : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$$\forall x,\ x', \qquad \begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |x'-a| < \delta \end{array} \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Exercice 54 Montrer que si f est majorée, croissante sur $]a, b[$, elle admet une limite quand x tend vers b.

Exercice 55 Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x+y}, \quad x, y > 0$$

Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 56 Montrer que si f est dérivable et admet une infinité de zéros sur un segment $[a, b]$ alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0 = f'(x_0)$.

Exercice 57 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \quad (p \wedge q = 1) \end{cases}$$

Déterminer les points en lesquels cette fonction est continue.

Exercice 58 Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \mathrm{E}(t) + (t - \mathrm{E}(t))^2,\ t \in \mathbb{R}$.
2. $g(t) = t\mathrm{E}(\frac{1}{t}),\ t > 0$.

Vérifier que g admet une limite à droite en 0.

Exercice 59 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que $f = f_1 + f_2$ avec f_1 paire, f_2 impaire et que cette décomposition est unique.

Exercice 60 Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, I intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $h := \sup(f, g)$ est continue sur I. Prouver que cette propriété se généralise à une famille finie de fonctions, mais non à une famille infinie.

Exercice 61 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, I intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f s'écrit comme différence de deux fonctions continues positives dont le produit est la fonction nulle.

Exercice 62 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Si f est bornée, peut-on affirmer que f atteint ses bornes ?
2. On suppose que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = l$ et que $f(\mathbb{R}) \subset [l, +\infty[$.

Montrer que f atteint sa borne supérieure.

Exercice 63 Soit C une partie non vide de $\mathbb{R}$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes.

i. Toute application continue de C dans $\mathbb{R}$ est bornée.

ii. Toute application continue de C dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Caractériser les parties C de $\mathbb{R}$ pour les quelles ces assertions sont exactes.

Exercice 64 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b [f(x)]^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Exercice 65

1. Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. On pose :

$$\phi(x) = \sup_{a\leq t\leq b} \Big[f(t) + xg(t) \Big], \quad x \in \mathbb{R}$$

   Montrer que ϕ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. **Généralisation.** Soit $f_0, f_1, \ldots, f_n$ des applications continues sur $[a, b]$. Etudier la continuité de la fonction ψ telle que :

$$\psi(x) = \sup_{a\leq t\leq b} \Big[f_0(t) + xf_1(t) + \cdots + x^n f_n(t) \Big]$$

Exercice 66 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Montrer que :

$$\forall \lambda > 0,\ \forall \nu > 0, \exists c \in]a, b[, \quad f(c) = \frac{\lambda f(a) + \nu f(b)}{\lambda + \nu}$$

Exercice 67 Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \exists c \in [0, 1 - \frac{1}{n}], \quad f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$$

Exercice 68 Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continues telle que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 69 Soit f :$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(2t)-f(t)}{t} = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l$.

Exercice 70 Déterminer les applications continues $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, $\forall x \geq 0,\ f(x^2) = f(x)$.

Exercice 71 Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, $\forall x,\, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 72 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que :

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R},\ f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

1. On suppose d'abord que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(\frac{k}{2^n}) = 0$$

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, x est limite d'une suite de nombres rationnels de la forme $\dfrac{k}{2^n}$. En déduire f.

Exercice 73 Déterminer toutes les applications continues g :$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ 2g(xy) = g(x^2) + g(y^2)$$

Exercice 74 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $t \longmapsto \inf_{a\in A} |t-a|$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 75 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 76 Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur l'ouvert $]0,1[$ (ou $]0,1]$) mais qu'elle n'y est pas uniformément continue.

Exercice 77 Etudier l'uniforme continuité des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \sqrt{t},\ t \geq 0$ 2. $f(t) = t^2,\ t \geq 0$
3. $f(t) = \sin(t),\ t \in \mathbb{R}$ 4. $f(t) = \sin(t^2),\ t \geq 0$

Exercice 78 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant une limite en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 79 Soit $I = [0, 1]$. Soit f définie sur I vérifiant :

$$(H) \qquad \forall x, y \in I, \ \ |f(x) - f(y)| \leq K\sqrt{|x - y|} \quad (K > 0)$$

a. Montrer que f est uniformément continue sur I. Montrer que l'ensemble des fonctions f vérifiants (H) est un espace vectoriel. (K dépend de f)

b. Montrer, par un exemple, qu'il existe une infinité de fonctions continues sur I ne vérifiants pas (H). Ces fonctions sont elles dérivables sur I.

c. Donner l'exemple d'une fonction non dérivable sur I et vérifiant (H).

Exercice 80 Une projection stéréographique polaire est une fonction f dans laquelle le domaine de définition est la sphère moins le pôle nord et l'image un plan parallèle à l'équateur mais ne contenant pas le pôle nord. f associe à chaque point x de $S \setminus \{N\}$ le point $y = f(x)$ où , un rayon issu de pôle nord passant par x coupe le plan. Supposons que le plan Y soit tangent à la sphère en son pôle sud.

a. Quelle est l'image d'un parallèle ?

b. Quelle est l'image d'un méridien ?

c. Quelle est l'image réciproque d'un segment Y ?

d. L'image de l'équateur est un cercle. Comment peut-on lier le diamètre de ce cercle au diamètre de l'équateur ?

e. Quelle est l'image réciproque d'un rayon passant par le pôle sud ?

Exos à traiter avec Maple

Exercice 81 On considère les deux suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $vn = u_n + \frac{1}{n!}$ Il est facile de vériffier que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentess et donc convergentes. On note e leur limite commune. Comment faut-il choisir n pour être sû d'avoir une approximation de e par u_n à moins de 10^{-4} près.

3 Dérivation et développements limités

Exercice 1 Trouver les dérivées de $f(x) = \log_2(x) = \log(\log(x))$, $f(x) = \log_3(x) = \log(\log(\log(x)))$, $f(x) = \log_n(x),\ n \geq 1$.

Exercice 2 Même exercice pour $f(x) = e^{e^x} - e^{e^{e^x}}$. Généraliser.

Exercice 3 Même exercice pour $f(x) = \mathrm{ch}^2(x^2+x+1)$; $f(x) = \mathrm{th}(\frac{x}{2}) - \coth(\frac{x}{2})$; $f(x) = \mathrm{ch}(\log x)$; $f(x) = \mathrm{Argsh}(x + \sqrt{x^2+1})$; $f(x) = \mathrm{th}(\log(x)+1)$.

Exercice 4 Etudier la dérivabilité, puis calculer la dérivée de f. Etudier si la fonction se prolonge en 0 et si ce prolongement est dérivable en 0.

1. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}},\ x \geq 0$
2. $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1}),\ x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = (x^x)^x,\ x > 0$
4. $f(x) = x^{x^x},\ x > 0$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\dfrac{1}{x}) \sin(\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{x})}) & \text{si } x \notin \{0\} \cup \{\frac{1}{n\pi};\ n \in \mathbb{Z}^*\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 mais non dérivable en $\dfrac{1}{n\pi}$.

Exercice 6 Calculer l'angle que font entre elle, en leur point d'intersection les courbes $y = \sin x$ et $y = \cos x$ avec $0 < x < T$.

Exercice 7 Idem pour les courbes $y = x^\alpha$ et $y = x^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$.

Exercice 8 Soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que la dérivée n^{ieme} de f s'écrit $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, où P_n est un polynôme dont on précisera le degré. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b. Montrer que $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(p)}(0)$ existent pour tout p et valent 0.

c. Prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dessiner le graphe de f.

Exercice 9 Donner une expression plus simple de :

1. $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;
2. $f(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$;
3. $f(x) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$;

4. $f(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1}$.

Exercice 10 Montrer que l'équation $x^n - ax - b = 0$ où $n \geq 2$, a, $b \in \mathbb{R}$, a au plus deux (resp. trois) racines réelles si n est pair (resp. impair).

Exercice 11 Prouver que si f admet une dérivée bornée sur $]a,b[$ alors f est uniformément continue sur $]a,b[$; et que si de plus a et b sont finis alors f est bornée sur $]a,b[$ (on utilisera le théorème des accroissements finis). Analyser ce qui se passe pour $f(x) = \log x$, $]a,b[$ infini.

Exercice 12 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = l \ \text{ (finie)}$$

Montrer que f admet une dérivée à droite de a que cette dérivée est exactement l.

Exercice 13 La fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 14 Que peut-on dire de la réciproque de l'exercice 12 ?

Exercice 15

a. Démontrer que si f est dérivable sur I et admet n zéros sur I alors f' admet $n-1$ zéros sur I séparant les zéros de f.

b. Montrer que les racines de $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \right]$ sont réelles et sont dans $]-1,1[$.

c. Montrer que P_n admet exactement n racines dans $]-1,1[$.

Exercice 16 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable, s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moin une fois sur I.
Application. Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ une suite de points distincts de I. Montrer qu'il existe un polynôme P_f et un seul dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n-1$, tel que, pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$ on ait $P_f(t_k) = f(t_k)$. On suppose de plus que $f^{(n)}$ est bornée sur I, et on pose $M_n(f) = \sup_{t \in I} \left| f^{(n)}(t) \right|$.
Montrer que le polynôme P_f satisfait à la condition suivante :

$$\sup |f(t) - P_f(t)| \leq \frac{M_n(f)}{n!} \sup_{t \in I} \left| \prod_{k=1}^{n} (t - t_k) \right|$$

Exercice 17 Soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,+\infty[$, et telle que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 18 Soient f, g, h : $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 19 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et a, $b \in I$ avec $a < b$. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi)$$

Généraliser ce résultat au cas où f est n fois dérivable sur I et s'annule en n points distincts.

Exercice 20 Soit $f : [-h,h] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ $(h > 0)$, s'annulant en n points distincts de $[-h,h]$ dont $-h$ et h, alors $M_0(f) \leq \dfrac{(2h)^2}{n!} M_n(f)$ où $M_k(f) = \sup\limits_{-h \leq t \leq h} \left| f^{(k)}(t) \right|$ pour $0 \leq k \leq n$.

Application. Soit $f : [-h,h] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ $(h > 0)$, ayant toutes ses dérivées bornées par un même nombre réel M. Montrer qu'il ne peut exister de polynôme prenant les mêmes valeurs que f en une infinité de pints dont $-h$ et h, que si f est elle même polynomiale.

Exercice 21 On pose $f(x) = e^{x^2}$.

a. Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$ où $\deg(P_n) = n,\ n \in \mathbb{N}$.

b. Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P'_n, P_n. (On applique la formule de Leibniz)

Exercice 22 Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$.

1. Montrer que si f et $f^{(p)}$ sont bornées alors il en est de même pour $f^{(k)}$ pour tout $1 \leq k \leq p-1$.
2. On pose $M_k = \sup\limits_{t \geq 0} \left| f^{(k)}(t) \right|$. Montrer que :

$$M_k \leq 2^{k(p-k)} M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}$$

Exercice 23 Montrer que l'application $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la bijection réciproque est $g : y \longmapsto \mathrm{Argsh}(\tan(y))$. Etablir les relations suivantes :

- $\sin(y) = \mathrm{th}(x)$
- $\cos(y) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$
- $\tan(\frac{y}{2}) = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$
- $\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}) = e^x$

Exercice 24 Montrer que la relation $x^3 + tx = e^t$ permet de définir une application $t \longmapsto x(t)$ de $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Etablir que cette application réciproque est une bijection continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Etudier la dérivabilité de cette application.

Exercice 25 Soit p, $q \in \mathbb{R}$. Etudier sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + px + q = 0$. Prouver qu'elle admet trois racines réelles distinctes si seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Exercice 26 Résoudre l'équation :

$$\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 27 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et A, $B \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que $A + \dfrac{t}{n} \geq B\sqrt[n]{t}\ \forall t \in [0, +\infty[$.

Application. En déduire que :

$$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0, \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Exercice 28 Peut-on dériver terme à terme des fonctions liées par un signe d'inégalité ?

Exercice 29 Soit $f(x) = (x-a)^n \phi(x)$. Calculer $f'(a)$, $f''(a)$, hypothèses minimales sur ϕ ?

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées respéctivement par M_0 et M_2.

1. Montrer que f' est bornée et que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.
2. Montrer qu'en fait on a mieux :
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$$
3. Généraliser au cas où f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec f et $f^{(n)}$ bornées.

Exercice 31 Soit $g : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables, telle que $g''(x) \leq 0\ \forall x \in I$ et $g(a) = g(b) = 0$

a. Montrer que $\forall x \in I$, $g(x) \geq 0$. Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème des accroissement finis.

b. En déduire que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivables est telle que $f'' \leq 0$ alors :
$$f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f(x)$$

c. Soit f telle que $f''(x) \geq -k$. Pourver que :
$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} + \frac{(b-x)(x-a)}{2}$$
Indication : considérer $h(x) = \dfrac{k(b-x)(x-a)}{2} - f(x)$.

Exercice 32 La fonction $g(x) = x(1 + \sin x \sin \frac{1}{x} + x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Montrer que $\forall x \geq 0$, $g(x) \geq x$ mais qu'il existe x tel que $|g'|(x) < 1$ sur tout intervalle $[0, \alpha[$ $(\alpha > 0)$.

Exercice 33 Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, telle que f' soit décroissante. On suppose qu'il existe $A > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que :

$$f'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{A}{x^\alpha}$$

1. Montrer que $f'(x) > 0$ sur $[a, +\infty[$.

2. Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{B}{x^{\alpha-1}} = Bx^{1-\alpha}$$

3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[f(a), +\infty[$, strictement croissante, et il existe $c > 0$ tel que :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Cx^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4. Prouver que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f^{-1})'$ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et que de plus, il existe $D > 0$ telle que :

$$(f^{-1})'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Dx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Exercice 34 Etudier les extremums de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 35 Idem pour la fonction :

$$g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 36 Calculer le DL à l'ordre 7 de la fonction $f(x) = \tan x$ en 0.

Exercice 37 Calculer le DL à l'ordre 5 de la fonction $f(x) = e^{2x-x^2}$ en 0.

Exercice 38 Calculer le DL à l'ordre 6 de la fonction $f(x) = \log(\cos x)$ en 0.

Exercice 39 Calculer le DL a l'ordre 5 de la fonction $f(x) = \sin(\sin x)$ en 0.

Exercice 40 En utilisant les DL calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x - \text{sh}x}{x^3}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1 - \text{ch}x^2}{x^4}$.

Exercice 41 Calculer la valeur approchée de e à 10^{-6} prés. Utiliser la formule de Taylor.

Exercice 42 Calculer la valeur approchée de $\sin 1°$ à 10^{-6} prés.

Exercice 43 Calculer la valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} prés, on écrira $\sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{5}{4}} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ et on considérera $(1+x)^m$ pour $x = \frac{1}{4}$, $m = \frac{1}{2}$.

Exercice 44 Calculer la valeur approchée de $\log 2$ à 10^{-5} prés.

Exercice 45 Même exercice pour $\log 3$.

Exercice 46 Trouver les portions de convexité et les points d'inflexion des fonctions suivantes :

1. $f(x) = ax^2 - b^2\frac{x^3}{3},\ a > 0,\ b > 0,$
2. $f(x) = xe^{bx},\ b \neq 0.$

Exercice 47 Déterminer les extrémums des fonctions suivantes :

1. $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{b^2x},\ a > 0,\ b > 0,$
2. $f(x) = \dfrac{x}{1+b^2x},\ b > 0,$
3. $f(x) = (x-a)^2(x-b)^3,\ 0 < a < b.$

Exercice 48 Construire les graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{4-x^2}{1+x^2},$
2. $f(x) = (x-a)e^{\frac{1}{x}},\ a > 0.$

Exercice 49 Prouver les inégalités suivantes :

1. $x - x^3 6 < \sin x < x,\ x > 0,$
2. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$

Exercice 50 Trouver la distance de la courbe $y = x^2$ à la droite $y - x + 2 = 0$.

Exercice 51 Trouver les intervalles de concavité et les points d'inflexion des fonctions suivantes :

a. $y = f(x) = 3x^2 - x^3,$

b. $f(x) = e^{-x^2}.$

Exercice 52 Déterminer les graphes i.e. les tracer des courbes suivantes données en coordonnées paramétriques :

$$(a)\ \begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= 3t - t^3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x &= \frac{2+t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

Exercice 53 Déterminer le rayon de courbure des courbes suivantes :

a. $y^2 = 2px,$

b. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$

c. $y = \frac{1}{2}(1-\cos t),\ x = \frac{1}{2}(t - \sin t)$ (Une cycloïde).

Exercice 54 Former l'équation de la développée de la cycloïde :

$$\begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Exos à traiter avec Maple

Exercice 55 On considère la fonction f donnée par :

$$x \longmapsto f(x) = \mathrm{sh}(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$

Déterminer les coefficients a, b, c, d et e pour que l'on ait $f(x) \sim \lambda x^{11}$ au voisinage de 0 où λ à déterminer.

Exercice 56 Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme. Trouver a, b, c et d pour que

$$u_n = (n^6 + 3n^2)^{1/6} - (P(n))^{1/3}$$

soit le terme général d'une série convergente.

4 Séries numériques

Exercice 1 En partant de définition, étudier la convergence des séries ci-dessous et trouver leurs sommes :

a. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+1)(n+2)}$.

Exercice 2 Montrer que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ est divergente en utilisant le lien entre série et intégrale.

Exercice 3 Montrer que :

$$S_N^1 := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = O(\log(N+1))\,;$$

$$S_N^\alpha := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = O[(N+1)^{1-\alpha}],\ 0 < \alpha < 1\ N \geq 1\,;$$

$$R_N^\alpha := \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = O(N^{1-\alpha}),\ \alpha > 1\ N \geq 1.$$

Exercice 4 En utilisant les critères de comparaison, étudier la convergence des séries suivantes :

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n^4+1}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+\alpha}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\dfrac{1}{n})$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\dfrac{1}{n^2})$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}$

Exercice 5 A l'aide du critère de Cauchy ou de D'Alembert, étudier la nature des séries suivantes :

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}$ b. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{3^k}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} (\dfrac{k+1}{2k+1})^k$ d. $\sum_{k=1}^{\infty} (\dfrac{k}{3k-1})^{2k-1}$

Exercice 6 En utilisant le critère Intégrale-Série, étudier la nature des séries suivantes :

a. $\sum \dfrac{1}{n \log n \log \log n}$ (généraliser) b. $\sum \dfrac{1}{k(\ln k)^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2}$.

Exercice 7 Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx \qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x^4} dx$$

Exercice 8 Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ converge absolument si les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ convergent.

Exercice 9 Montrer que la suite $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \log x$ admet une limite C.

C s'appelle la constante d'Euler, $C = 0,577216\ldots$

Exercice 10 Trouver les sommes des séries suivantes :

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

Exercice 11 A l'aide du critère de Cauchy, étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n^2} \qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$$

Exercice 12 Montrer que la série (dite de Bertrand) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}(\log k)^{\beta}}$:

i. Converge si $\alpha > 1$ et β quelconque.

ii. Converge si $\alpha = 1$ er $\beta > 1$.

iii. Diverge si $\alpha < 1$ et β quelconque.

iv. Diverge si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$.

Exercice 13 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{n^z} = e^{-z \log n}$, $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ est absolument convergente pour Re$z > 1$. Sa somme $\zeta(z)$ est la fonction Zeta de Riemann.

Exercice 14 Elle donne valeur approchée de $n!$ pour les grandes valeurs de n et a une importance capitale en pratique.

On pose $S_n = \log \dfrac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$, $n \geq 2$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente en cherchant un développement asymptotique de u_n au voisinage de $+\infty$.

2. En déduire que S_n a une limite notée S. Ainsi la suite $\sigma_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ converge vers e^S.
3. Utiliser la formule de Wallis pour obtenir que $e^S = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)$$

avec $\lim \varepsilon_n = 0$, ou encore $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

N.B. Il existe des précisions plus poussées sur le calcul de $n!$.

Exercice 15 Donner un exemple de deux séries dont les termes généraux sont équivalents mais qui ne sont pas de même nature.

Exercice 16 Calculer la valeur approchée par défaut de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ à $\dfrac{1}{100}$ prés.

Exercice 17 En utilisant le développement en série de Arctan$x$, $|x| < 1$, donner un encadrement de Arctan$\frac{1}{5}$ à la 4^{ieme} décimale.

Exercice 18 Utiliser la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\frac{1}{5} - \text{Arctan}\frac{1}{239}$$

pour avoir π comme la somme de deux séries trés rapidement convergentes. En donner une valeur approchée à 10^{-5} prés.

Exercice 19 En partant de $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, calculer la valeur de e à 10^{-8} prés (par défaut).

Exercice 20 En écrivant $\log 2 = \log \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$, calculer $\log 2$ à 10^{-4} prés.

Exos à traiter avec Maple

Exercice 21 On considère la série numérique de terme générale $u_n = \frac{(-1)^n}{1+n^3}$ dont la somme est notée s et S_n sa somme partielle d'ordre n. On rappelle qu'un résultat de cours affirme que $|s - S_n| \leq \frac{1}{1+(n+1)^3}$ pour tout n.

1. Ecrire une procédure qui calcule S_n pour tout n. Calculer S_{10}.
2. Trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $|s - S_n| \leq 10^{-4}$.
3. Calculer une valeur approchée de s avec 3 décimales exactes.

Exercice 22 On se donne la série numérique dont le terme générale est défini par

$$u_n = \sqrt{n}\,\sin\left(\frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}\right)$$

1. En utilisant Maple, donner un développement asymptotique de u_n quand $n \to +\infty$.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

5 Integration

Exercice 1 Montrer que $S = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ est une somme de Riemann de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur un intervalle à définir. En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Exercice 2 En utilisant les sommes de Riemann calculer les limites suivantes :

1. $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(k-1)\pi}{2n}$
2. $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$
3. $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$
4. $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-p^2}}$

Exercice 3 Calculer les dérivées de :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \qquad \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t} \qquad \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{|t|}dt$$

Exercice 4 On pose $I_{2p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^{2p}\theta}$.

a. Calculer I_0 et I_2.

b. Calculer la dérivée de $\theta \longmapsto \dfrac{\sin\theta}{\cos^{2p+1}\theta}$ et en déduire une relation de récurrence entre I_{2p} et I_{2p+2}.

Exercice 5 Calculer les limites en encadrant les intégrales :

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} \qquad l_2 = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \qquad l_3 = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}dt$$

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}, \int \frac{xdx}{x^2+1}, \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\text{Arctanx}}}{1+x^2}dx, \int \sin x\sqrt{1+\cos x}dx$.

Exercice 8 Calculer $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta d\theta$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$
4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$
6. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt[4]{1+x} dx$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+9}}$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$
10. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-6x-9x^2}}$
11. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$
12. $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+2}}$

Exercice 10 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \sqrt{x^2-4-x} dx \qquad \int \sqrt{x^2-4x+9} dx$$

Exercice 11 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{-x^2+2x+1} dx$
2. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^0 \sqrt{1-6x-9x^2} dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+2x+3} dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{-x^2-2x+2} dx$

Exercice 12 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx \qquad \int \frac{2x+1}{\sqrt{x-4x^2}} dx$$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+3}{\sqrt{-4x^2+4x+3}} dx$
2. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^1 \frac{x+2}{\sqrt{9x^2-6x+5}} dx$
3. $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{-3x^2+x}}$
4. $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{5x^2-6x+2}}$

Exercice 14 Calculer $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ pour $x \geq 1$.

Exercice 15 Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ pour $x \geq 1$.

Exercice 16 Calculer $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ pour $x \geq 1$.

Exercice 17 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}, \quad x \geq 0 \qquad \int \frac{dx}{x+3+\sqrt{x^2+2x}}, \quad x \geq 0$$

Exercice 18 Calculer les primitives suivantes :

$$\int (x^2+3x+2)e^x dx \qquad \int (x^2-2x+2)e^{-2x} dx$$

Exercice 19 Calculer $\displaystyle\int e^{-x}(\cos 2x - 2\sin 2x)dx$.

Exercice 20 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-2x}(\cos 3x - \sin 3x)dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-3x}(\cos 2x + 2\sin 2x)dx$$

Exercice 21 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\text{Arcsin}x)^2 dx \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\text{Arcsin}x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Exercice 22 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \log(1+\cos x)dx$.

Exercice 23 Déterminer a et b pour que l'on ait :

$$\int_0^{\pi} (ax^2+bx)\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 24 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx,\ n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. On suppose que $n \geq 2$. Calculer I_n en fonction de I_{n-2}.

c. Calculer I_{2p}, I_{2p+1} pour $p \geq 1$.

Exercice 25 Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$
2. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4-1}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+3x^2-4}$
5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2-x+1)^2}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^4(x^2+x+1)}$

Exercice 26 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{2x^2+2x+5} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{2x^2-2x+1}$$

Exercice 27 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \log(2x^2-2x+1)dx \qquad \int_{-4}^{-3} \text{Arctan}\frac{x+3}{x+5} dx$$

Exercice 28 Calculer $\int \cos^4(x)\sin^3(x)dx$, $\int \cos^4(x)dx$, $\int \sin^4(\theta)\cos^2(\theta)d\theta$.

Exercice 29 Calculer $\int \frac{\tan 2x}{\tan 3x}dx$, $\int \frac{dx}{\cos^4(x)}$, $\int \frac{\cos 2x}{\sin 3x}dx$.

Exercice 30 Calculer $\int \frac{d\phi}{2+3\cos\phi}$, $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$, $\int \tan^5(x)dx$, $\int \frac{1}{\tan^5(x)}dx$.

Exercice 31 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan\frac{x}{2}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos 2x\cos x}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\cos x}$.

Exercice 32 Calculer $\int_0^{\log 3} \frac{dx}{15\mathrm{ch}x-17\mathrm{sh}x}$, $\int_0^{\frac{1}{4}\log 3} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}$.

Exercice 33 Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue.

1. Trouver une CNS pour que :
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$$
2. Trouver une CNS pour que :
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = (b-a)\sup_{a\le t\le b}|f(t)|$$
3. Que dire de 1. et 2. si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$?

Exercice 34 Soit $a>0$ et $f,\ g:[-a,a]\longrightarrow\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x\in[-a,a]$ on a $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $f(x)=\int_0^x g(t)dt$. Montrer que $f=g=0$.

Exercice 35 Soit $f,\ g:I\longrightarrow\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$). Montrer que $\forall(a,b)\in I\times I$ on a :
$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)dt$$

Application. Soit $h:I\longrightarrow\mathbb{C}$ continue. Montrer que $\forall a\in I,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, la fonction :
$$F:x\longmapsto\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}h(t)dt$$
est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que sa dérivée n^{ieme} est h.

Exercice 36 Soit $p,\ q\in\mathbb{N}^*$. Soit P_n, ($n\in\mathbb{N}^*$), le polynôme défini par $P_n=\frac{1}{n!}X^n(p-qX)^n$.

1. Montrer que P_n et ses dérivées successives, prennent des valeurs entières aux points 0 et $\frac{p}{q}$.
2. Montrer que la suite de terme générale $I_n=\int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t)\sin(t)dt$ converge vers 0.
3. En déduire que $\pi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
4. Montrer que la suite $J_n=\int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t)e^t dt$ converge vers 0 et que $\forall n\ge 1,\ J_n>0$. En déduire que $\forall r\in\mathbb{Q}_+^*,\ e^r\notin\mathbb{Q}$ (raisonner comme au 3.)

Exercice 37 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists!\, f(x) \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}dt = 1$. Etudier l'application f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty[$ continue. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leq C \int_0^x f(t)dt$$

Que dire de la fonction f ?

Exercice 39 Trouver un intervalle $I \ni 0$ de longueur > 0 et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Exercice 40 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.
Ind. Commencer par le cas où f est constante, en escalier.

Exercice 41 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \longmapsto \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ et $t \longmapsto \frac{\sin(2n+1)t}{t}$ sont continues (par prolongement) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$ et $b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}dt$. Calculer a_n et conclure en utilisant un exercice précédent que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 42 Soit f une fonction strictement croissante, continue sur $[0,a]$ ($a > 0$) et $f(0) = 0$. On pose $g = f^{-1}$.

1. On considère la fonction F définie sur $[0,a]$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

   Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée (on supposera dans un premier temps que f est dérivable).

2. Montrer que :

$$\forall (u,v) \in [0,a] \times [0,f(a)], \quad uv \leq \int_0^u f(t)dt + \int_0^v g()dt$$

   En déduire que si $p > 1$ et $q > 1$ alors :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Exos à traiter avec Maple

Exercice 43

1. Calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$
2. Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$

6 Equations différentielles

Exercice 1 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x(x-1)y' + y = x$$

1. Intégrer l'équation (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy' - y + \frac{2x+1}{(x+1)^2} = 0$$

1. Intégrer l'équation (E) sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. En déduire les solutions maximales de (E).

Exercice 3 Intégrer et déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes :

a. $y' = e^{x+y}$ b. $x^2y' = x^2 + y^2 - xy$

c. $y' = yx - 1$ d. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

Exercice 4 Soient α un nombre réel non nul, a et b deux fonctions continues sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle de Bernoulli suivante :

$$(E) \qquad y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0$$

1. Soit y une solution de (E) ne s'annulant pas sur I et $\alpha \neq 1$. On pose $z = y^{1-\alpha}$. Montrer que z vérifie une équation différentielle du 1^{er} ordre que l'on déterminera.
2. **Application.** Intégrer les équations différentielles suivantes :

   a. $x^3y' - x^2y + y^4 = 0$ b. $y' = y + x^2y^2$

   c. $xy' + 3y = x^2y^2$ d. $2xy' - y^2 + 1 = 0$

Exercice 5 On appelle équation de Riccatti une équation de la forme :

$$(R) \qquad y' + f(x)y = g(x)y^2 + h(x)$$

où f, g et h sont des fonctions sur un intérvalle I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si on connait une solution y_1 de (R), alors en posant $y = z + y_1$, on se ramène à une équation de Bernoulli en z.
2. Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$y' = \frac{1}{x}y^2 - (2 + \frac{1}{x})y + x + 2$$

Exercice 6 Intégrer l'équation différentielle de Clairant suivante :

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$$

Préciser la solution singulière si elle existe. Est-elle une enveloppe de droites ?

Exercice 7 Soit l'équation différentielle de Clairant suivante :

$$y'^3 + y'x - y = 0 \qquad (\star)$$

1. Quelle est sa solution générale.
2. Montrer que l'annulation d'un discriminant d'une équation convenable du $3^{\text{ième}}$ degré fournit une solution singulière de $(\star)$.
3. Montrer que la solution singulière est l'enveloppe d'une fammille de droites qui constitue la solution générale.

Exercice 8 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $y'' + 4y' + 4y = xe^x$ b. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x(\sin x + \cos x)$

c. $y'' + 8y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2}$ d. $y'' + 2y' - 3y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

e. $y'' + y' = \dfrac{1}{\cos x}$ f. $y'' + 2\lambda y' + (\lambda^2 + 1)y = \sin x$

Exercice 9 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad (x - 1)y'' + (2x - 1)y' + xy = 0$$

1. Déterminer les valeurs du nombre réel a pour que la fonction $y_0 : x \longmapsto e^{ax}$ soit solution de (E).
2. Soit y une fonction deux fois dérivable. On pose $y = zy_0$ (cf question 1). Montrer qu'une CNS pour que y soit solution de (E) est que z' vérifie une certaine équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
3. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les solutions de (E) sur $]-\infty, 1[$, $]1, \infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $x + yy' = 0$ b. $x(1 + x^2)yy' = 1 + y^2$

c. $y' + \dfrac{x}{1 + x^2}y = \dfrac{1}{2x(1 + x^2)}$ d. $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$

e. $(x + 1)y' + (x - 1)y = x^3 - x^2 + 1$ f. $y^2 + xy^2 + (x^2 - yx^2)y' = 0$

g. $y^2 + 2xy + y'(y^2 - x^2) = 0$

Exercice 11 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad x(1 - x)y' + (1 - x)y = 1$$

1. Intégrer (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) dans $]-\infty, 0[$ et qu'il n'existe aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et α est un réel non nul.

1. Montrer que si y est une solution qui ne s'annule pas sur I et que si $\alpha \neq 1$, alors $z = y^{1-\alpha}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
2. **Application.** Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$\bullet\, x^3y' - x^2y + y^4 = 0 \qquad\qquad \bullet\; y' = y + x^2y^2$$

Exercice 13 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $x + yy' = 0$ b. $xy(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0$

c. $y' = (2x+3x^2)(1-y)$ d. $xy' = (x-1)y$

Exercice 14 Intégrer les équations différentielles :

a. $y^2 + 2xy + y'(y^2 - x^2) = 0,$

b. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}.$

Exercice 15 Intégrer les équations différentielles :

a. $y^2 + xy^2 + (x^2 - yx^2)y' = 0,$

b. $x(1+x^2)y' - y(x^2-1) + 2x = 0,$

c. $(x+1)y' + (x-1)y = x^3 - x^2 + 1,$

d. $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{2x(1+x^2)}.$

Exercice 16 Intégrer les équations différentielles :

a. $y'' - 2y' + y = 6xe^x,$

b. $y'' + 2y' - 8y = 4(3x+5)e^{2x},$

c. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos(2x) + 25\sin(2x),$

d. $y'' + 6y' - 9y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}e^{-3x}.$

Exercice 17 On considère l'équation différentielle d'Euler suivante :

$$(E) \qquad ax^2 + y'' + bxy' + cy = 0$$

1. Trouver la (ou les) CNS pour que la fonction $f : x \longmapsto x^r (r \in \mathbb{R})$ soit solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).
2. **Application.** Intégrer sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles suivantes :
   a. $x^2y'' + 3xy' + y = 1,$
   b. $x^2y'' + xy' + y = x.$

Exercice 18 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$(E_a) \qquad x^{a+1}y'' + (2a+1)x^a y' + a^2 x^{a-1} y = -1$$

1. Pour $a = 0$, intégrer (E_0).
2. On suppose $a > 0$. Montrer que l'application $x \longmapsto x^{-a}$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation associée à (E_a).
3. En déduire la solution sur $\mathbb{R}_+^*$ du problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} x^{a+1}y'' + (2a+1)x^2 y' + a^2 x^{a-1} y = -1 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 2a - 1 \end{cases}$$

Exercice 19 On considère l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(E) \qquad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; la fonction a ne s'annulant pas sur I. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales aux points d'abscisse $\alpha \in I$ sont concourantes ou parallèles.

Exercice 20 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad (x-1)y'' + (2x-1)y' + xy = 0$$

1. Déterminer les valeurs du nombre réel a pour que la fonction $y_0 : x \longmapsto e^{ax}$ soit solution particulière de (E).
2. Soit y une fonction deux fois dérivables. On pose $y = zy_0$. Montrer qu'une CNS pour que y vérfie (E) est que $'$ vérifie une équation différentielle du 1^{er} ordre que l'on déterminera.
3. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les solutions de (E) sur $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $y'(x^2 - x) = 1 + y^2$ b. $x^2 y' = y^2$

c. $y'(x^2 + 2) - 2y = 0$.

Exercice 22 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $x^2 y' = (x + y)^2$ b. $xy' = y \cos^2 \frac{y}{x}$

Exercice 23 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $xy' + y = e^x$ b. $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$

Exercice 24

1. Intégrer l'équation différentielle linéaire :
$(E_1) \qquad -xy' + y = x^2 \cos x.$
2. En déduire la solution générale de l'équation de Bernoulli : $xy' + y = x^2 \cos(x) y^2$.
3. On considère l'équation de Riccatti :
$(E_2) \qquad xy' + y = x^2 \cos(x)(y^2 - x^2) + 2x.$
En remarquant que $y_0 = x$ est solution particulière de (E_2), déterminer les solutions générales de (E_2).

Exercice 25 On considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \qquad (1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

1. A l'aide d'un changement de variable trigonométrique, montrer que (E) se ramène à une équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on résoudra.
2. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 26 On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + q(x)y = 0$$

où q est une fonction continue sur $I =]a, b[$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension ≤ 2. Soit y_1, y_2 ces solutions. On pose :
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$
2. Montrer que $\dfrac{dW}{dx} = -q(x)W(x)$; et calculer $W(x)$.
3. En déduire que si $W(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in]a, b[$ alors W ne s'annule en aucun point de $]a, b[$; on sait alors que dans ce cas les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $]a, b[$.
4. **Généralisation.** On considère l'équation différentielle d'ordre n :
$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_n(x)y = 0.$$
On note $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ le système des solutions à qui on associe le wronskien (déterminant de Wronski) défini par :
$$W(x) = W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & . & . & . & y_n(x) \\ y_1'(x) & . & . & . & y_n'(x) \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & . & . & . & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$
Montrer que :
$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1(x) & . & . & . & y_n(x) \\ y_1'(x) & . & . & . & y_n'(x) \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-2)}(x) & . & . & . & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & . & . & . & y_n^{(n}(x) \end{vmatrix}$$
et en déduire que $\dfrac{dW}{dx} = -p_1(x)W(x)$. Conclure.

Exos à traiter avec Maple

Exercice 27 On considère l'équation différentielle $(E) : (1-t)\,y'(t) - t\,y(t) = -1$.

1. En utilisant la commande **dsolve**, résoudre (E) sur un intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Etudier l'existence d'une solution de (E) définie sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 28 On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad (x^2 + y(x)^2)\,y(x)' - 2\,x\,y(x) = 0$$

Trouver les solutions de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

7 Etude d'une courbe plane

Exercice 1 Etudier la courbe $(\mathcal{C})$ suivante au voisinage de $t = 1$:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2+1}{t} \\ y(t) &= (t-1)^2 e^{1-t} \end{cases}$$

Exercice 2 Etudier la courbe $(\mathcal{C})$ suivante au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^3 \end{cases}$$

Exercice 3 Etudier la courbe $(\mathcal{C})$ suivante au voisinage de $t = 1$:

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) &= t^2 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Exercice 4 On considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) &= t - \log(1+t) \\ y(t) &= t - \frac{t^2}{2} - \log(1+t) \end{cases}$$

1. Etudier les branches infinies et préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à ses asymptotes éventuelles.
2. Chercher les points de rebroussement de la courbe $(\mathcal{C})$.
3. Etudier l'existence des points d'inflexion.
4. Etudier les variations de la courbe $(\mathcal{C})$.
5. Tracer le graphe de $(\mathcal{C})$.

Exercice 5 Etudier la courbe $(\mathcal{C})$ définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3}{t(t-2)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2-3}{t} \end{cases}$$

Préciser les coordonnées du (ou des) point(s) double(s). Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 6 On considère la courbe $(\mathcal{C})$ définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\cos 2t}{\cos t} \\ y(t) &= \log t \end{cases}$$

1. Montrer qu'il suffit d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ (préciser les axes de symétries, période).
2. Etudier les branches infinies.
3. Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 7 Construire l'astroïde d'équation :

$$\begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t) \end{cases}$$

Préciser les symétries et les points de rebroussements.

Exercice 8 Donner des paramétrages des courbes définies par les équations suivantes :

a. $y = ax^2$ b. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ c. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Exercice 9 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3}{t} + t^3 \\ y(t) &= \dfrac{e^3}{t} + t^3 \end{cases}$$

a. Vérifier que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie et en déduire que le domaine d'étude peut être réduit à $]0, +\infty[$.
b. Etudier les variations de x et y sur $]0, +\infty[$.
c. Calculer les limites aux bornes.
d. Etudier les branche infinies.
e. Déterminer la tangente en $t = 1$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
f. Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 10 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe déterminée par l'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} - 1$$

a. Vérifier que le domaine d'étude peut être réduit à $D = [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
b. Etudier les variations de r sur D.
c. Calculer les limites aux bornes de D.
d. Etudier les branches infinies.
e. Tracer $(\mathcal{C})$ et préciser les tangentes pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Exercice 11 Construire les courbes paramétrées $(\mathcal{C})$ suivantes en précisant les points signalés.

a. $(2t+t^2, 2t-\frac{1}{t^2})$; point stationnaire, parabole asymptote, point double.

b. $(t^2+\frac{2}{t}, t+\frac{1}{t})$; point stationnaire, parabole asymptote, point d'inflexion.

c. $(t\log t, \frac{\log t}{t})$; symétrie.

d. $(e^t\sin t, \frac{1}{\mathrm{sh}t})$.

e. $(\int_0^t \frac{1-\cos u}{e^{u^2}-1}du, \int_0^t \frac{u\sin u}{e^{u^2}-1}du)$.

Exercice 12 Idem avec :

a. $\begin{cases} x(t) &= (1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= 1+\cos t)\sin t \end{cases}$ (cardinoïde) b. $\begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t) \end{cases}$ (astroïde).

Exercice 13 La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathcal{C})$ est le lieu (Γ) des points du plan d'où peut mener au moins deux tangentes à $(\mathcal{C})$ orthogonales. Déterminer (Γ) dans les exemples suivants :

a. $\begin{cases} x(t) &= 4t^3 \\ y(t) &= 3t^4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x(t) &= t^2-2t \\ y(t) &= 2t^3-3t^2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3(t) \\ y(t) &= a\sin^3(t) \end{cases}$ $(a>0)$.

Exercice 14 Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à :

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x(t) &= 3t^2 \\ y(t) &= 4t^3 \end{cases}$$

Exercice 15

a. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$: $\begin{cases} x(t) &= t\cos t - \sin t \\ y(t) &= 2\cos t \end{cases}$.

b. Montrer que les tangentes à $(\mathcal{C})$ en les points stationnaires de $(\mathcal{C})$ sont concourantes.

Exercice 16

a. Tracer la courbe $(\mathcal{C}) : t \longmapsto r(t) = (\cos^2(t), \cos t(1+\sin t))$.

b. A tout point M de $(\mathcal{C})\setminus\{0\}$, on associe le point $M(u) \in (\mathcal{C})\setminus\{0\}$ tel que $OM(t) \perp OM(u)$. Déterminer le lieu (Γ) du milieu des segments $M(t)M(u)$ et préciser $(\Gamma)\cap(\mathcal{C})$.

Exercice 17 Déterminer le lieu des points stationnaires de la courbe paramétrée suivante lorsque λ décrit $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{C}_\lambda) : \begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) + \lambda\sin t \\ y(t) &= \sin^3(t) + \lambda\cos t \end{cases}$$

Exercice 18 Déterminer l'ensemble des points de rebroussements des courbes suivantes lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathcal{C}_{a,b}) : \begin{cases} x(t) &= 2t + \frac{a}{t^2} \\ y(t) &= t^2 + \frac{2b}{t} \end{cases}$$

Exercice 19 Construire les courbes suivantes définies en coordonnées polaires.

a. $\rho = \dfrac{1-\cos\theta}{2+\cos^2(\theta)}$ b. $\rho = \tan\theta$ c. $\rho = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$

d. $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ (lemniscate) e. $\rho = \mathrm{th}\frac{\theta}{2}$ f. $\rho = 1 + \tan\dfrac{\theta}{4}$

g. $\rho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}$ h. $\rho = ae^{\lambda\theta}$, $\lambda \neq 0$ et $a > 0$ (spirale logarithmique).

Exercice 20 Reconnaître les courbes suivantes :

a. $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ b. $\rho = \dfrac{1}{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}$

c. $\rho = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 3\theta}$ d. $\rho = \dfrac{2}{\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta}}$

Exercice 21

a. Tracer $(\mathcal{C}) : \rho = \cos^3(\theta) - \sin^3(\theta)$.
b. Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ en lesquels la tangente est de pente 1.

Exercice 22

a. Tracer $(\mathcal{C}) : \rho = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.
b. Montrer que les pieds des normales à $(\mathcal{C})$ issues de θ sont situées sur un même cercle.

Exercice 23 Déterminer la courbe orthoptique (cf exercice 13) de la courbe $(\mathcal{C}) : \rho = ae^{\lambda\theta},\ a > 0,\ \lambda > 0$.

Exercice 24 Construire les courbes suivantes définies implicitement :

a. $x^2 - y^2 = 2\log\frac{x}{y}$ b. $x(x^2 - y^2) + y^2 = 0$
c. $y^3 - y + 2x^2 - x = 0$ d. $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$
e. $x^5y^4 - 4x^3y + 3 = 0$ f. $2xy = \sin(x^2 + y^2)$

Exos à traiter avec Maple

Exercice 25 En utilisant Maple, tracer les courbes des exercices 3 et 19.